

捷联惯导系统速度误差补偿实用算法

冯济琴¹, 邹劲松², 林克勤²

(1. 重庆工学院 电子信息与自动化学院, 重庆 400050; 2. 西南计算机有限责任公司, 重庆 400060)

摘要:捷联式惯性导航系统在姿态矩阵和位置矩阵的解算中会产生滞后误差, 由于真实参考坐标系和计算参考坐标系在实际系统中并不重合也将产生计算误差, 为此须对速度误差进行补偿。该文提出将速度计算分做两步进行, 先在机体坐标系里完成带补偿的速度增量计算, 再在游动坐标系里实现由惯导基本方程得到的速度计算公式。实际试验表明, 这种实用算法比常规的速度计算方法有效改善了系统的定位精度。

关键词:捷联惯导系统; 速度计算; 误差补偿; 实时性

中图分类号: U666.1 文献标识码: A

A Practical Algorithm for Speed Error Compensation of SINS

FENG Ji-qin¹, ZOU Jing-song², LIN Ke-qin²

(1. College of Electronic Information and Automatization, Chongqing Institute of Technology, Chongqing 400050, China;

2. Southwest Computer Co., Ltd., Chongqing 400060, China)

Abstract: The lag error could be produced in the calculation of the attitude matrix and the position matrix of SINS, the calculation error could be produced due to the non-coincidence between the true reference coordinate system and the calculation reference coordinate system in actual systems. Thus it is necessary to compensate for speed error. It is suggested that the calculation of speed may be carried out in two steps; the first is the calculation of the increment of speed with compensation performed in the body coordinate system, and then comes the calculation formula of speed achieved through the basic equation of inertial navigation in the roving coordination system. Actual tests have shown that this practical algorithm has more effectively improved system positioning accuracy than common speed calculation methods.

Key words: SINS; speed calculation; error compensation; real-time performance

在研制捷联式惯性导航系统中, 减少速度计算误差对提高定位精度有重要意义^[1], 其中比力积分的坐标转换误差和位置矩阵计算的滞后误差是造成速度计算误差的重要原因。在程序编排上将求取速度增量放在机体坐标系里进行, 并在机体坐标系里完成对速度增量姿态误差的补偿, 从而减少坐标转换误差, 此外将在机体坐标系里求取速度增量的计算周期和采样周期保持一致, 而非长达数倍的系统计算周期, 从而减小滞后误差, 提高了实时精度。提出的算法在研制的捷联式激光陀螺惯性导航系统中得到了实现, 结果表明这一算法有效提高了系统的输出精度。

1 速度计算基本方程

对采用东北天坐标系的游动自由方位惯性导航系统设游动坐标系为 P , 地球坐标系为 e , 由惯性导航系统基本方程^[2]

$$\dot{V}_{eP}^P = S_F^P + g^P - (2 \dot{i}_e^P + \dot{e}_P^P) \times V_{eP}^P \quad (1)$$

式中 V_{eP} 为游动坐标系中载体相对地球的运动速度; S_f 为载体所受的比力; g 为重力加速度; i_e 为地球自转角速度; e_P 为测量游动坐标系相对地球运动的角速度。

由式(1)可得

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_{ePx}^P \\ \dot{V}_{ePy}^P \\ \dot{V}_{ePz}^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{Fx}^P \\ S_{Fy}^P \\ S_{Fz}^P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -2 \dot{i}_e C_{33} & 2 \dot{i}_e C_{23} + \dot{e}_{Py}^P \\ 2 \dot{i}_e C_{33} & 0 & - (2 \dot{i}_e C_{13} + \dot{e}_{Px}^P) \\ - (2 \dot{i}_e C_{23} + \dot{e}_{Py}^P) & 2 \dot{i}_e C_{13} + \dot{e}_{Px}^P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ePx}^P \\ V_{ePy}^P \\ V_{ePz}^P \end{bmatrix} \quad (2)$$

式中

$$C_e^P = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin L \cos L & \sin L \cos L & -\cos L \\ -\cos L \sin L & \sin L \sin L & -\sin L \\ \cos L \sin L & \cos L \sin L & \sin L \end{bmatrix} \quad (3)$$

收稿日期: 2008-10-23

作者简介: 冯济琴(1973-), 女, 四川雅安人, 高级工程师, 学士, 主要从事捷联惯性导航技术的研究。

其中 L 为当地纬度; λ 为当地经度; α 为游移方位角。

式(2)整理后得到

$$\begin{cases} \dot{V}_{ePx}^P = S_{Fx}^P + 2ieC_{33}V_{ePy}^P - (2ieC_{23} + \frac{P}{ePy})V_{ePz}^P \\ \dot{V}_{ePy}^P = S_{Fy}^P - 2ieC_{33}V_{ePx}^P + (2ieC_{13} + \frac{P}{ePx})V_{ePz}^P \\ \dot{V}_{ePz}^P = S_{Fz}^P - g + (2ieC_{23} + \frac{P}{ePy})V_{ePx}^P - \\ (2ieC_{13} + \frac{P}{ePx})V_{ePy}^P \end{cases} \quad (4)$$

式中

$$\begin{bmatrix} \frac{P}{ePx} \\ \frac{P}{ePy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{R_E} - \frac{1}{R_N} \right) \sin \cos & - \left(\frac{\sin^2}{R_E} + \frac{\cos^2}{R_N} \right) \\ \frac{\sin^2}{R_E} + \frac{\cos^2}{R_N} & \left(\frac{1}{R_N} - \frac{1}{R_E} \right) \sin \cos \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ePx}^P \\ V_{ePy}^P \end{bmatrix} \quad (5)$$

其中 R_N 为地球子午面曲率半径; R_E 为地球卯酉面曲率半径。

将式(5)代入式(4), g 用文献[2]中有关公式计算,系数 C 及角 θ 通过解位置矩阵微分方程求得,将 V_{ePz}^P 引入外部高度信息进行组合,以克服垂直通道由于不稳定而造成的发散,这样式(4)中剩下的只有 S_F^P 即 f_{ib}^P ,而系统实际测得的比力为 f_{ib}^b ,所以要将比力 f_{ib}^b 完成由机体系 (b) 向游动系 (P) 的转换,即

$$f_{ib}^P = C_b^P f_{ib}^b = C_g^P C_b^g f_{ib}^g \quad (6)$$

机体系向地理系转换的姿态矩阵 $C_g^P =$

$$\begin{bmatrix} \cos & -\sin & 0 \\ \sin & \cos & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 可由解算四元数微分方程得到。}$$

在完成上述各步运算后,式(4)剩下的未知数就只剩 \vec{v}_{eP}^P 的3个分量,可利用常微分方程组的数值解法,如龙格-库塔法或欧拉法进行求解,获得载体在游动坐标系里相对于地球的速度。

2 速度误差产生的机理

速度误差主要可分为计算姿态矩阵和位置矩阵产生的滞后误差及数学解析平台的计算误差两部分。

由方向余弦矩阵微分方程

$$\dot{C}_b^g = C_b^g \begin{matrix} ik \\ gb \end{matrix} = C_b^g \left(\begin{matrix} ik \\ ib \end{matrix} - \begin{matrix} ik \\ ig \end{matrix} \right) \quad (7)$$

根据相似变换得到

$$\dot{C}_b^g = C_b^g \begin{matrix} ik \\ ib \end{matrix} - \begin{matrix} gk \\ ig \end{matrix} C_b^g \quad (8)$$

式(8)中第一项为载体坐标系的转动对方向余弦矩阵的校正,此时可把地理坐标系看作是不动的,也即有 $g(n+1) = g(n)$,这样先看

$$\dot{C}_b^g = C_b^g \begin{matrix} ik \\ ib \end{matrix} \quad (9)$$

由毕卡逼近法解得

$$C_b^g(n+1) = C_b^g(n) e^{\begin{matrix} ik \\ ib \end{matrix}} \quad (10)$$

因为 $\begin{cases} C_{b(n+1)}^{g(n)} = C_{b(n)}^{g(n)} C_{b(n+1)}^{b(n)} \\ C_{b(n+1)}^{g(n)} = C_b^g(n+1) \end{cases}$, 可得

$$C_b^g = C_{b(n+1)}^{b(n)} = e^{\begin{matrix} ik \\ ib \end{matrix}} \quad (11)$$

式(8)中第二项为地理坐标系的转动对方向余弦矩阵的校正,此时把载体坐标系看作是不动的也即有 $b(n+1) = b(n)$,这样再看

$$\dot{C}_b^g = - \begin{matrix} gk \\ ig \end{matrix} C_b^g \quad (12)$$

同理可解得

$$C_b^g(n+1) = e^{- \begin{matrix} gk \\ ig \end{matrix}} C_b^g(n) \quad (13)$$

因为 $\begin{cases} C_{b(n+1)}^{g(n+1)} = C_{g(n)}^{g(n+1)} C_{b(n+1)}^{g(n)} \\ C_{b(n+1)}^{g(n)} = C_b^g(n) \end{cases}$, 可得

$$C_b^g = C_{g(n+1)}^{g(n)} = e^{\begin{matrix} gk \\ ig \end{matrix}} \quad (14)$$

于是由

$$C_b^g(n+1) = C_{g(n)}^{g(n+1)} C_b^g(n) C_{b(n+1)}^{b(n)} \quad (15)$$

可得

$$C_b^g(n+1) = e^{- \begin{matrix} gk \\ ig \end{matrix}} C_b^g(n) e^{\begin{matrix} ik \\ ib \end{matrix}} = C_b^g C_b^g(n) C_b^b \quad (16)$$

式(16)说明姿态矩阵随机体坐标系的转动, $(n+1)$ 时刻和 n 时刻的转移关系, $C_b^g(n+1)$ 是由 $C_b^g(n)$ 分别左乘矩阵指数函数 $e^{- \begin{matrix} gk \\ ig \end{matrix}}$ 和右乘矩阵指数函数 $e^{\begin{matrix} ik \\ ib \end{matrix}}$ 的结果,从式(16)可见姿态矩阵计算滞后引起的误差。同理,由于位置矩阵计算的滞后,也会引起速度滞后误差。

在捷联式惯导系统误差方程与分析中^[2],由于真地理坐标系和计算地理坐标系在实际系统中不重合,将产生计算误差,计算地理坐标系 t 和真地理坐标系 t 间有小角度矢量角 θ ,其负反对称矩阵为

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 & \theta_z & -\theta_y \\ -\theta_z & 0 & \theta_x \\ \theta_y & -\theta_x & 0 \end{bmatrix}$$

则这一误差因子将出现在数学平台误差角方程和速度误差方程中。由于 b 系相对 t 系有确定的姿态角,故 t 系对 t 系的运动也就相当于 b 系对 t 系的运动。基于上述两种原因,为克服计算位置矩阵 C_e^P 的滞后误差和计算比力 S_F^P 积分的姿态误差和座标转换误差,必须对速度误差进行补偿。为此,将速度的计算分作两步进行,先计算在机体系里的速度增量,再在游动坐标系里利用式(4)计算出载体相对地球的速度,不从机体系速度直接变换到游动系,还是为了避免姿态矩阵带来的误差。采用在机体系里对速度增量误差进行补偿,不仅可使误差补偿形式简化,且由于在机体系里速度增量的计算周期可与采样周期一致,不必要象在游动坐标系里

速度计算周期只能与惯导系统的计算周期一致,这样大大提高了速度增量计算的实时性,从而提高了速度增量的计算精度。

3 速度计算的误差补偿算法

速度增量的误差补偿易于在机体坐标系里进行。设

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 & \cos \alpha_1 \sin \alpha_3 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 & \sin \alpha_1 \sin \alpha_3 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 \\ -\cos \alpha_2 \sin \alpha_3 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 & \sin \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 \sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_2 & -\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 & \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \quad (17)$$

记为

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = C_b^c \begin{bmatrix} X_b \\ Y_b \\ Z_b \end{bmatrix} \quad (18)$$

令 $t_k - t_{k-1} = h$, h 为采样时间,由于惯导系统一般采用高速采样,采样周期一般均在 10 ms 以下, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为在一个采样周期里转过的角度,因此 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为小角,这样 $\cos \alpha_i \approx 1, \sin \alpha_i \approx \alpha_i (i=1, 2, 3)$, 略去 2 阶小量, C_b^c 阵就化简为

$$C_b^c = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

且可证明在转动为小角度的条件下,无论 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 转动顺序如何变化(共有 6 种方式),式(19)的值不变。即此时 C_b^c 阵只与每个坐标轴转过的角度大小有关,与坐标轴转动的顺序无关。

设在 $(K-1)$ 时刻的速度矢量为 \vec{V}_{K-1} , 在 K 时刻, \vec{V}_{K-1} 大小没变,方向发生了变化,即视在速度发生了变化,机体坐标在 $K-1$ 时刻对应于 b 系,在 K 时刻便对应于 c 系了。我们分两步来计算,第一步先计算在 K 时刻 \vec{V}_{K-1} 从 b 系转到 c 系后由于方向变化而形成的新的速度矢量 \vec{V}_K ; 第二步在 \vec{V}_K 基础上再加上本周期由比力产生的速度增量 W 。即从 $K-1$ 时刻到 K 时刻机体位置从 b 系运动到 c 系,而计算 K 时刻的速度则必须在 c 系里进行。

设 $(K-1)$ 时刻,载体在机体坐标系的速度为 \vec{V}_{K-1} , 在 K 时刻的速度为 \vec{W}_K , 从 $(K-1)$ 时刻到 K 时刻由比力引起的速度增量为 W 。则

$$\begin{bmatrix} V_{X,K} \\ V_{Y,K} \\ V_{Z,K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{X,K-1} \\ V_{Y,K-1} \\ V_{Z,K-1} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} W_{X,K} \\ W_{Y,K} \\ W_{Z,K} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{X,K} + W_x \\ V_{Y,K} + W_y \\ V_{Z,K} + W_z \end{bmatrix} =$$

从 $K-1$ 时刻到 K 时刻,机体坐标系的空间位置发生了变化,机体系沿 X_b 轴转动角 α_1 , $X_b Y_b Z_b$ 系变成了 $X_b Y_b Z_b$ 系;再沿 Y_b 轴转动角 α_2 , $X_b Y_b Z_b$ 系变成了 $X_b Y_b Z_b$ 系;最后沿 Z_b 轴转动角 α_3 , $X_b Y_b Z_b$ 系变成了 $X_c Y_c Z_c$ 系;记 $X_b Y_b Z_b$ 系为 $X_c Y_c Z_c$ 系。则

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha_3 & -\alpha_2 \\ -\alpha_3 & 1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{X,K-1} \\ V_{Y,K-1} \\ V_{Z,K-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

式(21)即为进行了补偿的机体坐标系速度计算公式。

4 速度增量计算公式

对照实际系统,机体系各轴取向如图 1 所示,绕 x 轴转动的角度为倾斜角 α_x ,绕 y 轴转动的角度为航向角 α_y ,绕 z 轴转动的角度为俯仰角 α_z ,分别以 $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ 代替 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,则由方程(20)可得

$$\begin{cases} V_{X,K} - V_{X,K-1} = \alpha_z V_{Y,K-1} - \alpha_y V_{Z,K-1} \\ V_{Y,K} - V_{Y,K-1} = -\alpha_z V_{X,K-1} - \alpha_x V_{Z,K-1} \\ V_{Z,K} - V_{Z,K-1} = \alpha_y V_{X,K-1} - \alpha_x V_{Y,K-1} \end{cases} \quad (22)$$

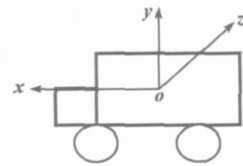


图 1 机体系各轴取向图

将差分方程改为微分方程得

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_z & -\alpha_y \\ -\alpha_z & 0 & \alpha_x \\ \alpha_y & -\alpha_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} \quad (23)$$

将式(23)看成

$$\begin{cases} V_x = f_1(t, V_x, V_y, V_z) \\ V_y = f_2(t, V_x, V_y, V_z) \\ V_z = f_3(t, V_x, V_y, V_z) \end{cases} \quad (24)$$

则可建立 4 阶龙格-库塔方程组

$$\begin{cases} K_{11} = \alpha_z V_y - \alpha_y V_z \\ K_{12} = \alpha_x V_z - \alpha_z V_x \\ K_{13} = \alpha_y V_x - \alpha_x V_y \\ k_{21} = \alpha_z (V_y + \frac{h}{2} K_{12}) - \alpha_y (V_z + \frac{h}{2} K_{13}) \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} k_{22} = x(V_z + \frac{h}{2} K_{13}) - z(V_x + \frac{h}{2} K_{11}) \\ k_{23} = y(V_x + \frac{h}{2} K_{11}) - y(V_y + \frac{h}{2} K_{12}) \\ k_{31} = z(V_y + \frac{h}{2} K_{22}) - y(V_z + \frac{h}{2} K_{23}) \\ k_{32} = x(V_z + \frac{h}{2} K_{23}) - z(V_x + \frac{h}{2} K_{21}) \\ k_{33} = y(V_y + \frac{h}{2} K_{21}) - x(V_y + \frac{h}{2} K_{22}) \\ k_{41} = z(V_y + h K_{32}) - y(V_z + h K_{33}) \\ k_{42} = x(V_z + h K_{33}) - z(V_x + h K_{31}) \\ k_{43} = y(V_x + h K_{31}) - x(V_y + h K_{32}) \\ V_x(n+1) = V_x(n) + \frac{h}{6} (K_{11} + 2K_{21} + 2K_{31} + K_{41}) \\ V_y(n+1) = V_y(n) + \frac{h}{6} (K_{12} + 2K_{22} + 2K_{32} + K_{42}) \\ V_z(n+1) = V_z(n) + \frac{h}{6} (K_{13} + 2K_{23} + 2K_{33} + K_{43}) \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases} W_x(n+1) = V_x(n+1) + W_x \\ W_y(n+1) = V_y(n+1) + W_y \\ W_z(n+1) = V_z(n+1) + W_z \end{cases} \quad (27)$$

由式(21)和式(27)得

$$\begin{cases} W_x(n+1) = V_x(n+1) + W_x \\ W_y(n+1) = V_y(n+1) + W_y \\ W_z(n+1) = V_z(n+1) + W_z \end{cases} \quad (28)$$

式(27)是一个迭代公式,在导航计算中,车辆一般是从静止开始启动,所以 \bar{v} 的初值可设定为零,只要得到陀螺的采样角度值便可以计算出 $\bar{v}(n+1)$ 来,式(28)中 $\bar{w}(n+1)$ 是在一个采样周期中最终得到的速度表达式。

实际系统采用四子样采样,在上一个采样周期中得到的 $\bar{w}(n+1)$ 的值要赋值给下一个采样周期的 $\bar{v}(n)$,作为下一个采样周期的速度初值。循环四次后,即得到在一个计算周期结束后载体在机体系中的速度。如果在每个计算周期结束时将 $\bar{v}(n)$ 清零,则 $\bar{w}(n+1)$ 的值就表示一个计算周期中产生的速度增量,它包含由于载体转动造成的速度变化增量和比力引起的速度增量。

5 实际系统的补偿效果

我们用实际系统进行了跑车对比实验^[3],实验在公路上按纯惯性导航的条件进行(见图2、3)。实验的出发点假定为A,终点为B。道路1车辆行驶道路经过较多的曲线段,圆环段是一个多圈螺旋上升路,道路2是一段比较平直的道路。图中细实线由GPS测点组成,虚线是速度增量仅有 \bar{w} 即未经误差补偿的定位曲线,粗实线是按式(21)进行了误差补偿的定位曲线。由图可看出,在直线段由于 $x = y = z = 0$,所以补偿不太起作用,3条曲线有较好的重合度,而在拐弯段,补偿明显发挥作用,因此,经补偿的曲线更接近GPS测出的曲线。

$x = y = z = 0$,所以补偿不太起作用,3条曲线有较好的重合度,而在拐弯段,补偿明显发挥作用,因此,经补偿的曲线更接近GPS测出的曲线。

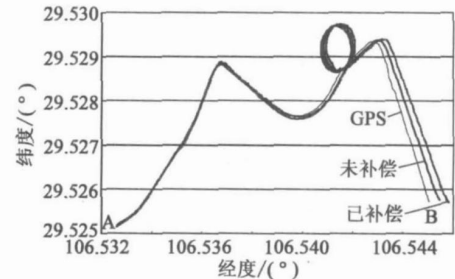


图2 有较多曲线段的道路1的定位曲线

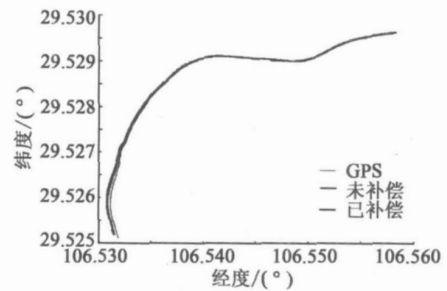


图3 比较平直的道路2的定位曲线

6 结束语

由式(21)可导出速度增量的计算式为

$$\begin{bmatrix} V_{x,k} \\ V_{y,k} \\ V_{z,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{x,k-1} \\ V_{y,k-1} \\ V_{z,k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{bmatrix} \quad (29)$$

式中 \bar{v} 为速度增量; \bar{v}_{k-1} 为上一采样时刻的速度; $\bar{\omega}$ 为采样周期里载体转动的角度; \bar{w} 为比力在采样周期里引起的速度增量分量。可以看出,载体在采样周期中的转动角度对速度增量具有一定影响,式(21)带有角度修正量,将其在机体坐标系里按采样周期同步实现,可修正因在采样周期内载体的小角度转动带来的速度增量误差。通过实验表明,本方法可提高捷联惯导系统的速度计算精度,改善系统的定位精度。

参考文献:

- [1] 袁信,俞济祥,陈哲. 导航系统[M]. 北京:航空工业出版社,1993.
- [2] 以光衢. 惯性导航原理[M]. 北京:航空工业出版社,1987.
- [3] 方靖,顾启泰,刘学斌,等. MINS/GPS组合导航系统设计与实验[J]. 清华大学学报(自然科学版),2007,47(8):1316-1319.
- [4] 魏贵玲,卜继军,吕志清. 寻北仪软件的模块化设计[J]. 压电与声光,2001,4(2):161-163.
- [5] 秦永元. 惯性导航[M]. 北京:科学出版社,2007.