

时空坐标转换理论与时栅位移传感器研究*

彭东林 刘成康 谭为民 (重庆大学机械传动国家重点实验室 重庆 400044)

摘要 剖析了各种调制式位移传感器工作原理和数学模型,按照“用时间测量空间”的思路,借助于伽里略变换,首次提出“带时间考查点的相对运动双坐标系”思想,将位置之差变成时间之差进行测量,最终抽象总结成为一套时空坐标转换的新理论,由此指导设计出一种全新的位移传感器——时栅。

关键词 坐标转换 时栅

Study on the Theory of Time-space Coordinate Transformation and the Time Grating Displacement Sensor

Peng Donglin Liu Chengkang Tan Wein

(State Key Laboratory of Mechanical Transmission, Chongqing University, Chongqing 400044)

Abstract The work principle and mathematical model of various modulation displacement sensors are analyzed. Based on the idea of “measuring space by time” and the Galilean Transformation, it proposes for the first time the idea of “relative motion dual coordinate with points for time check”, and transforms the difference of space into the difference of time to measure. And then, a theory of time-space coordinate transformation and a new displacement sensor called Time Grating are developed.

Key words Coordinate transformation Time grating

1 引 言

在生产科研实践中,用时间测量空间,或者说时空坐标进行互换是大量存在的。大至天文学中的“光年”,小至用氦 86 原子在真空中的波长作为长度基准,以及常见的用 X-T 坐标方式反映的屏幕显示和打印等均可视为时空坐标的转换。但是在位移测量中,通常认为只有恒速运动才便于用时间测量空间。

由于人类目前时间的测量手段远高于空间的测量手段,精度高 3 个数量级以上,方便更简便,且不易受温度和重力等周边物理环境变化的干扰,因此本研究尝试对已有的测量方法从新的角度进行理论抽象,提出新的用时间进行位移测量的方法,最后形成一种新的位移传感器——时栅位移传感器。

2 电激型与动激型调制式传感器

感应同步器是最常见的调制式位移传感器,如图 1 所示,设在定尺的两个绕组上分别加以交流激磁信号 $u_s = \sin \Omega t$ 和 $u_c = \cos \Omega t$,则在动尺绕组上可获得感应电势为:

$$\begin{aligned} u_{sc} &= k \sin(\Omega t + \theta) = k \sin(2\pi f t + \frac{2\pi x}{W}) \\ &= k \sin 2\pi(\frac{t}{T} + \frac{x}{W}) \end{aligned} \quad (1)$$

式中 x —位移

W —节距

k —幅值

u_{sc} —感应电势

Ω —角频率

t —时间

T —周期

* 本文于 1999 年 4 月收到,系国家自然科学基金资助项目。

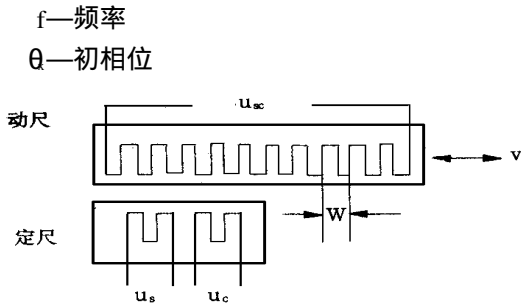


图 1 感应同步器原理(例 1)

如果是圆传感器,则动尺定尺分别对应转子和定子,结论完全一样。可看出 u_{sc} 既是时间的函数,又是空间的函数。

为了便于与下面内容衔接,再看一种不常见的调制式位移传感器——齿栅(或磁栅)位移传感器如图 2 所示。(为简洁起见,以下讨论不分回转或直线运动,统一用 V 表示恒定速度, v 表示任意变化速度)。

所谓齿栅,就是一个齿数较多的齿轮发讯头,如图 2 所示。用一电感线圈作为测头,齿轮转动时,每掠过一颗齿,在测头上感应出一个正弦波。测头与齿栅的相对运动包含两部份,一方面,齿栅随同步电动机 M 以恒速 V 转动,另一方面,测头随转台以任意速度 v 和任意方向转动,于是测头输出电势为

$$\begin{aligned}
 u &= k \sin 2\pi Z (V + v) dt = k \sin \left(\frac{2\pi}{W} V t + v dt \right) \\
 &= k \sin \frac{2\pi}{W} (V t + x) \\
 &= k \sin 2\pi \left(\frac{Vt}{W} + \frac{x}{W} \right) \\
 &= k \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{W} \right) \\
 &= k \sin (\Omega t + \theta) \quad (2)
 \end{aligned}$$

式中, Z —齿数; $W = \frac{1}{Z}$ —齿距。

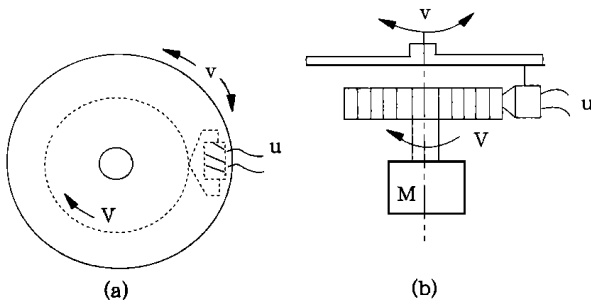


图 2 齿栅传感器原理(例 2)

即得到与式(1)同样的结果,数学模型的相同说明二者在物理本质上具有相似性。对这两种输出信号,只要再有一路相位固定的同频率信号 $k \sin \Omega t$ 与之进行

比相,求出相位差 θ 即得到位移。前一种称为“电激型”,第二种称为“动激型”。

3 匀速运动与变速运动的位移测量

事实上,对于一个匀速运动质点,已经可以借用时间 t 去测量空间位移 x ,如图 3 所示,有

$$x = \int_0^T V dt = VT = V P_t \quad (3)$$

式中 P_t —离散化的时间脉冲

这样可以理解为:通过常量 V ,已经使得 P_t 具有了空间意义,所以可以通过对 P_t 的计数实现对 x 的测量。

但是客观实际中大量存在的运动是非匀速的,有时还是间断和变方向等各种不规则运动,对此式(3)并无实用意义。真正常用位移测量依据的数学模型是:

$$\begin{aligned}
 x &= v dt = \frac{dx}{dt} dt = dx = \Delta x \\
 &= W P_x \quad (4)
 \end{aligned}$$

式中 P_x —位移脉冲

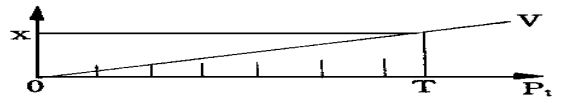


图 3 利用时间测量匀速运动

传感器按非调制方式工作,每通过一个栅距 W 产生一个脉冲 P_x ,对其累积计数再乘以脉冲当量 W 即可得到 x 。这种方法的测量精度和分辨率依赖于 W ,与 t 和 v 无关,为此人们追求刻线更密、更精确。

上述对调制式传感器的分析可以启发人们的思维:把非匀速运动调制到一个恒速运动上,是不是使测量的坐标系发生了变化?下面通过虚构的例 3,即对火车位移的测量,来表述一种新的研究思想。

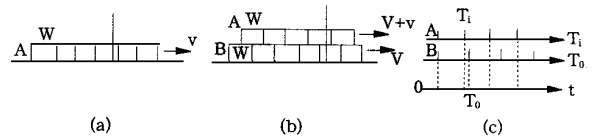


图 4 火车相对运动测量原理(例 3)

在图 4(a)中,火车 A 以速度 v 在地面行驶,为测量其位移,在地面设立一标志杆,依次对经过的车厢边缘进行观测,这时是以大地为参照物,按式(4)进行累加。特点是:测量过程不受 v 和 t 的影响,过一节车厢累加 1;测量的分辨率受限于车厢的长度 W 。而在图 4(b)中,设想火车 A 行驶在另一列以匀速 V 行驶的具

有相同车厢长度的另一列火车B上,并且是以B为运动参照坐标系,即是要测量A相对于B的位移 x_0 。这时设在大地上的标志杆应视为设在另一套坐标系上的一个考查点。测量方法是:依次考查火车A和B车厢边缘到达标志杆的时间 T_i 和 T_0 ,于是根据图4(b)和(c)可以推算出:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{T_i} (V+v) dt = \int_0^{T_0} V dt \\ \Rightarrow \int_0^{T_i} V dt + \int_0^{T_i} v dt &= \int_0^{T_0} V dt + \int_{T_i}^{T_0} V dt \quad (5) \\ \Rightarrow \int_0^{T_i} v dt &= \int_{T_i}^{T_0} V dt = V(T_0 - T_i) \end{aligned}$$

而这段时间内,A相对于B的位移正是:

$$x = \int_0^{T_i} v dt \Rightarrow x = V(T_0 - T_i) = V\Delta T = V \cdot P_i \quad (6)$$

于是和(3)式一样,这里也实现了用时间脉冲累加来求取空间位移,但是:

- (1) 这里是对非匀速运动的测量,具有实用意义。
- (2) 测量需要建立在一个恒速运动的坐标系上,另有一个固定的坐标系及考查点。
- (3) 公式中的 V 不再表示运动物体的速度,而是代表运动坐标系的速度。
- (4) 测量与 v 无关,无论它是变化的、变向的或是间断的,测量只与被测物在采样当时的位置有关。

4 时空坐标转换理论

在经典力学中讨论狭义相对论时,有一条著名的伽里略变换式。如图5所示,设有一个静止的坐标系 s ,另有一个相对于它沿 x 正方向以匀速 V 运动的坐标系 s' ,两坐标系各坐标轴平行,且当 $t = t = 0$ 时两坐标系原点重合,则在任一时刻 t 对同一质点 P 的运动进行观测,它在两套坐标系的坐标值变换关系为:

$$\begin{cases} x = x' + Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x = x' - Vt \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases} \quad (7)$$

从上一节讨论可以发现,如果是在静止的坐标系中讨论位移,只有匀速运动可以根据(3)式用时间脉冲去测量空间,而对非匀速运动就只有根据(4)式用空间脉冲去测量空间。但是在例3中,当(火车A)位移发生在一个活动的参照系(火车B)上,再以一个静止参照系(大地)上的点(观测杆)对其到达的时间进行考查,则位置之差变成了时间之差。

现以一维空间借用伽里略变换给出更一般的推

导。

如图6(a)所示,设匀速运动坐标系 s 在 $t = 0$ 时与静止坐标系重合,且质点 P 处于 s 原点位置即 $x = 0$ 。若时间变化到 t 时刻而 P 点在 s 无位移,根据(7)式知, P 点在 s' 的位置是

$$x = 0 + Vt = Vt \quad (8)$$

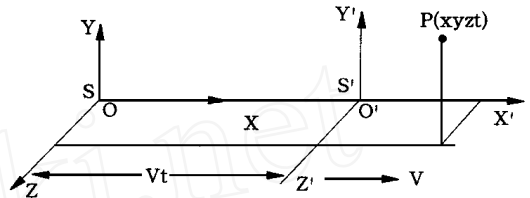


图5 伽里略变换

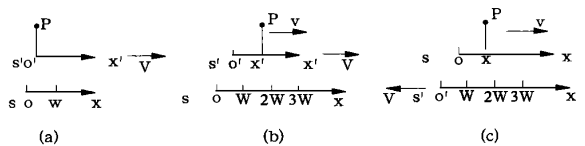


图6 带时间考查点的相对运动双坐标系

如事先在 s 上距离原点任意距离 W 处设有一考查点,则由(8)可推出 P 点或 S 上的参考点 O 到达 W 点的时间:

$$W = VT_0 \quad \text{或} \quad T_0 = \frac{W}{V} \quad (9)$$

式中 T_0 ——参考时间

再如图5(b)所示,如果 P 点在 s 发生位移 x ,不管发生在什么时候(只要在考查点以前),不管其速度 v 是多少,不管是否间断、往复的运动, P 点到达 W 点的时间将由 T_0 变成 T_i ,而参考点 O 到达的时间仍为 T_0 ,根据(7)式, P 点在 s 的位置是:

$$\begin{aligned} W &= x + VT_i \\ x &= W - VT_i = V(T_0 - T_i) = V\Delta T \quad (10) \end{aligned}$$

式中 T_i ——实际时间

P 点位移值由哪一套坐标系表示, P 朝哪一方向运动,都会使(10)式的表达式有符号上差异,因此可将(10)式更一般地表达为

$$x = V(T_i - T_0) = V\Delta T \quad (11)$$

式(11)就是推导出的用时间差来测量以任意速度 v 运动所引起位置差即位移量的基本数学模型。

如果在 s 上设立多个考查点,就可以不断对 x 变化情况进行读数采样。考查点的密度是任意的,只取决于人们希望的采样密度,并且把考查点设为等间距,也只是为了便于计算。

现在证明,前述三个例子都是式(11)的特例,或者

说,其数学模型都服从于式(11),只是根据具体情况以变通的方式来实现图 6 所示的相对运动双坐标系。现讨论如下:

(1)在例 3 中,不是在 s (地面)上设立等分的多个考查点,而是对 s (火车 B)作等间距 W 划分;同时, P 点(火车 A)也不再是一点,而是等间距 W 的若干点。分别依次通过 s 上的一点(观测杆)进行周期性考查,得到若干个考查结果 T_0 和 T_i ,达到和图 6 坐标系相同的效果。

(2)在例 2 中,单一的 P 点(活动测头)设在了 s (大地)上,而由旋转电机上的齿栅构成带有等分间距的 s 系,如图 6(c)所示,与(b)正好相反,仍是一个相对运动的坐标关系。

(3)要用式(11)解释例 1,人们的思维方式必须作更大的转变。其中关键的概念转变在于:一个按空间等分并以匀速 V 运动的坐标系 s ,其等分间隔点依次通过固定坐标系 s 上一个确定考查点的时间间隔相同;那么反过来,从电信号的角度看,一个时间间隔相同的电信号,就等效于这样一个“按空间等分、以匀速运动、间隔点依次通过 s 上确定考查点”的 s 坐标系,这个电信号就是例 1 中的固定周期励磁信号。于是例 1 可以这样理解:没有通电的定尺相当于静止的火车 B,动尺相当于其上的火车 A,二者间距 W 相同;一旦通过固定周期电激励,并感应到动尺,就相当于火车 B 乃至火车 A 都以恒速 V 运动起来,这时的定尺就是间距为 W 的 s 且不断通过考查点给出时间 T_0 ,动尺就是间距为 W 的若干个 P 点,也在不断地通过考查点给出时间 T_i 。当动尺相对定尺有位置变化,就会在 T_0 和 T_i 的差别上反映出来。因此,例 1 的实质是以 T 为周期的均匀间隔的时间信号,通过以 W 为均匀间距的空间排列线圈构成了等效的匀速运动的 s 坐标系,且时间坐标系和运动空间坐标系的参量关系为 $v = \frac{W}{T}$ 。另外,(1)式是一个典型的行波方程,因此也可以理解为是用行波电势构成了以 v 匀速运动的 s 坐标系。至此,可以总结出:

为了实现用时间测量质点 P 的空间位移,采用静止的和以恒速 v 运动的两套坐标系,其中一套坐标系带有固定的时间考查点。当质点 P 有位移并用其中一套坐标系表示,其大小等于 P 点和该系参考点分别到达另一套坐标系的时间考查点的实际时间 T_i 和理论时间 T_0 之差与 v 的乘积,即 $x = v(T_i - T_0)$ 。其中运动坐标系可由以 T 为固定周期的时间坐标系配合以 W 为固定间隔的空间静止坐标系即以 v 匀速运动的行

波等效代替,其关系为 $v = \frac{W}{T}$ 。

这就是所提出的“时空坐标转换理论”,简称 TST 理论。其意义在于:可以用“以时间测量空间”的思想解释已有的任何一种调制式位移传感器的原理,并为新的此类仪器设计提供理论基础。

5 时栅位移传感器

我们已通过建立 TST 理论,使时钟脉冲具有了空间意义: $x = P_x = V P_t$ 或 $P_x = V P_t$,于是从理论上说,我们获得了一种新的栅式位移传感器,可称之为“时栅位移传感器”,其原理框图如图 7 所示。

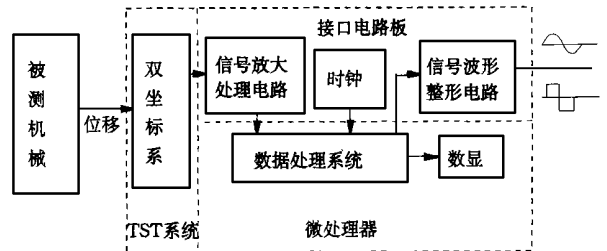


图 7 时栅位移传感器原理框图

根据 TST 理论及公式 $v = \frac{W}{T}$, TST 系统应该是具有“带时间考查点的相对运动双坐标系”性质的,具有固定空间尺度 W , 固定时间尺度 T 和固定速度 v 的这样一套机电系统。如齿栅,它具有固定的 W 和 v , 相对于一个静止测头,它可以生成 $T = W/v$; 如感应同步器,它具有固定的 W 和 T , 也就具有一个广义的 $v = W/T$ 。

TST 系统作为时栅传感器中的“时空坐标转换系统”,从以下三个方面实现从空间到时间的转换:(参见图 9 例)。

首先,实现对位移的调制。如例 1、例 2 所述,利用高速旋转的导磁材料引起的周期性磁场变化(或在定尺上通以交变电流),在动测头(或动尺线圈)上得到感应电势,从而将位移调制成为感应电势中的附加相位,即 $x = \theta$ 。周期性电信号相位是时间的函数,因此实现了第一步时空转换。

其次, TST 系统实现了“带时间考查点的相对运动双坐标系”及对运动质点和坐标原点的周期性考查,从而将定、动测头(定、动尺)的位置之差,变成了两路感应电势的相位之差,也就是时间之差,即 $x = v \Delta T$, 因此实现了第二步时空转换。

最后, TST 系统建立起唯一确定的时空等量关

系, 即由 $W = VT$, 得到 $x = V\Delta T$ 或 $P_x = V P_t$ 或 $P_x = VP_t$, 也就是说, 无论动激型或电激型, 只要 V 确定, (或 W 与 T 同时确定), 则时空转换的当量关系唯一确定, V 就是时间的空间当量, 因此实现了第三步时空转换。

在 TST 系统的基础上再辅以时钟脉冲源和微处理器, 以及相应电路, 即构成一个完整的时栅传感器。显然, 此时的传感器已具有可编程性、数据处理和显示等测试仪器或测试系统的功能了, 其智能化的特点, 有利于它进一步的扩展功能。

利用 TST 理论, 我们提出的一种尽可能简化的 TST 系统如图 8 所示。我们称之为“动激型单齿式时栅”。

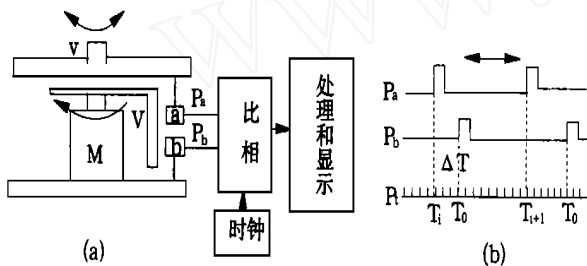


图 8 无刻线单齿式时栅位移传感器原理图

此时角形摇臂相当于单独一颗长齿, 随同步电机旋转相继掠过动测头和定测头, 发出感应信号, 整理为矩形波。 P_b 信号相位固定不动, P_a 信号的相位随摇臂的空间转动而同步移动 (机械移相), 空间 360° 与信号周期 $T = \frac{W}{V}$ 唯一对应 ($W = 360^\circ$ 空间角度), 于是可以通过对两路信号的比相, 测出其相位差, 以时间差表示, 得出动、定测头, 也就是转台转子和定子之间的位置差。

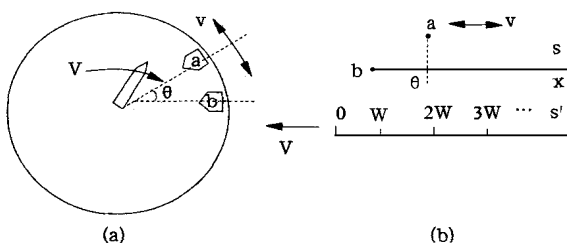


图 9 用于单齿式时栅的 TST 理论

对照 TST 理论, 如图 9 所示。大地 (转台定子) 为 S 坐标系, 定测头为原点 b , 动测头为运动质点 a , 旋转电机带动的角形臂, 构成带有 $W = 360^\circ$ 空间角度的等分考查点的运动坐标系 S' , 周期性地考查 S 系的 b 点和 a 点, 与图 6(c) 一样。通过这样一种带时间考查点的

相对运动双坐标系, 将动、定测头的位置之差 (即转台角位移) 变成了时间之差。与例 2 齿栅相比, 它已不靠空间刻线分度, 而靠时间脉冲分度, 因此它是时栅。

这种方案的主要思想是“充分利用圆周封闭原则”。根据 TST 理论, 具有空间意义的时钟脉冲 $P_x = VP_t = \frac{W}{T} P_t$, W 的精度直接影响测量精度 (传统的光栅、磁栅等也一样)。因此, 这里利用圆周封闭原则, 采用节距 $W = 360^\circ$ 的无刻线误差的单齿作为“分度”器作, 避免了刻线精度引起的制作困难、费用高等问题, 也就构成了一种全新的、无分度刻线的分度器件。

显然, 即使 W 无误差, 速度 V 的变化 (即 T 变化) 也会引起测量误差。同步电机的转速严格与工频一致, 而工频的波动频率很低。事实上, 我们只要把每一转以内的速度视为匀速并利用计算机实时算出当时的脉冲当量 $V = W/T$ 是多少, 一般就可以满足工程要求了。

另一个问题是时钟信号的频率问题。为了保证足够的分辨率, 要么 P_t 频率要高, 要么脉冲当量要小。以常用的同步转速 $V = 3000\text{rpm}$ 为例, $W = 360^\circ$, $T = 20\text{ms}$, 脉冲当量为 $64.8/\mu\text{s}$, 此时若采用 1M 时钟, 时钟信号的分辨率就是 64.8 。如果我们希望达到 1 分辨率, 时钟频率需达到 64.8M 。石英晶体发生这样频率的信号并不困难, 困难在于高频率的计数器件上。常用的可编程定时器计数器 8253 的计数频率上限为 2M , 8254 的上限为 10M 。另外, 高频信号的防干扰工作难度较大。

6 展 望

按照所提出的 TST 理论, 可以指导我们创新发明出各种各样结构尽可能简化的时栅位移传感器。尤其是根据“动激型”和“电激型”调制的对偶性, 可以设计出用固定周期电信号扫描来代替恒速机械旋转的电激型时栅新方案, 达到同样的“带时间考查点的相对运动双坐标系”效果, 并且更容易实现, 精度高, 无振动, 体积小。因此, 电激型时栅的开发应用前景将更为广阔。

参考文献

- 1 Peng Donglin, et al. Study on the theory of time-space coordinate transformation and time grating displacement sensor. 海内外青年制造科学会议及第三届吴贤铭制造科学研讨会论文集. 武汉: 华中理工大学出版社, 1998. 202 ~ 205.
- 2 强锡富. 几何量电测量仪. 北京: 机械工业出版社, 1981.